

Introducción a Métodos de Mallas Móviles Adaptativas para PDE's. Caso de 1D

Isidro A. Abelló Ugalde

Seminario Laboratorio de Cómputo Científico
Facultad de Ciencias, CU

Febrero 2011

Esquema de la Presentación

- 1 Ecuación de Burgers en 1D
 - Intro
 - Solución numérica estándar.
- 2 Métodos de Malla Adaptativa Movil
 - Idea
 - Aplicación a diferencias finitas
- 3 Consideraciones finales
 - Componentes básicos del método de malla móvil
 - Estrategias de movimiento de malla
 - Discretización de las PDE sobre mallas móviles
 - Solución alternada o simultánea

Presentación

- 1 Ecuación de Burgers en 1D
 - Intro
 - Solución numérica estándar.
- 2 Métodos de Malla Adaptativa Movil
 - Idea
 - Aplicación a diferencias finitas
- 3 Consideraciones finales
 - Componentes básicos del método de malla móvil
 - Estrategias de movimiento de malla
 - Discretización de las PDE sobre mallas móviles
 - Solución alternada o simultánea

Mallas para qué? Para resolver EPD's

Introducción

- Mallas: Discretizar geometrías complejas en 2D o 3D.
Ejemplos:
 - UnaMalla (Mallas estructuradas)
 - Triangulaciones

Mallas para qué? Para resolver EPD's

Introducción

- Mallas: Discretizar geometrías complejas en 2D o 3D.
Ejemplos:
 - UnaMalla (Mallas estructuradas)
 - Triangulaciones
- Mallas Adaptativas: Aún en caso de regiones simples ($a \leq x \leq b$) y con la cantidad de nodos fija, es conveniente ubicar los nodos en los lugares más interesantes.

Intro

Ecuación de Burgers 1D

Condiciones de Frontera y Condición inicial

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \quad \epsilon > 0$$

Ecuación de Burgers 1D

Condiciones de Frontera y Condición inicial

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x \quad \epsilon > 0$$

Condiciones de Frontera:

$$u(0, t) = u(1, t) \equiv 0$$

Condición inicial:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x)$$

Ecuación de Burgers 1D

Condiciones de Frontera y Condición inicial

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x \quad \epsilon > 0$$

Condiciones de Frontera:

$$u(0, t) = u(1, t) \equiv 0$$

Condición inicial:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x)$$

La solución $u(x, t) \in \Omega$ espacio de Sobolev

Ecuación de Burgers 1D

Condiciones de Frontera y Condición inicial

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x \quad \epsilon > 0$$

Condiciones de Frontera:

$$u(0, t) = u(1, t) \equiv 0$$

Condición inicial:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x)$$

La solución $u(x, t) \in \Omega$ espacio de Sobolev

Hablar de:

- Clasificación de la ecuación.
- Papel de ϵ .
- De donde surgió y que modela.

Nota: $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Presentación

- 1 Ecuación de Burgers en 1D
 - Intro
 - Solución numérica estándar.
- 2 Métodos de Malla Adaptativa Móvil
 - Idea
 - Aplicación a diferencias finitas
- 3 Consideraciones finales
 - Componentes básicos del método de malla móvil
 - Estrategias de movimiento de malla
 - Discretización de las PDE sobre mallas móviles
 - Solución alternada o simultánea

Solución numérica estándar.

Solución numérica estándar.

Aproximación de las derivadas. Semidiscretización de la ecuación

Tomemos $N + 1$ puntos equiespaciados de tamaño $h = \frac{1}{N}$ en la región espacial (valga la redundancia ☺) $0 \leq x \leq 1$

$$\mathcal{T}_h : \{x_j = j h, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

- $u_j = u_j(t) \approx u(x_j, t)$
- $u_x = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$
- $u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$

Solución numérica estándar.

Solución numérica estándar.

Aproximación de las derivadas. Semidiscretización de la ecuación

Tomemos $N + 1$ puntos equiespaciados de tamaño $h = \frac{1}{N}$ en la región espacial (valga la redundancia ☺) $0 \leq x \leq 1$

$$\mathcal{T}_h : \{x_j = j h, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

- $u_j = u_j(t) \approx u(x_j, t)$
- $u_x = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$
- $u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x =$$

Solución numérica estándar.

Solución numérica estándar.

Aproximación de las derivadas. Semidiscretización de la ecuación

Tomemos $N + 1$ puntos equiespaciados de tamaño $h = \frac{1}{N}$ en la región espacial (valga la redundancia ☺) $0 \leq x \leq 1$

$$\mathcal{T}_h : \{x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

- $u_j = u_j(t) \approx u(x_j, t)$
- $u_x = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$
- $u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = \epsilon u_{xx} - u u_x$$

Solución numérica estándar.

Solución numérica estándar.

Aproximación de las derivadas. Semidiscretización de la ecuación

Tomemos $N + 1$ puntos equiespaciados de tamaño $h = \frac{1}{N}$ en la región espacial (valga la redundancia ☺) $0 \leq x \leq 1$

$$\mathcal{T}_h : \{x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

- $u_j = u_j(t) \approx u(x_j, t)$
- $u_x = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$
- $u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = \epsilon u_{xx} - u u_x$$

$$\frac{du_j}{dt} = \epsilon \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) - \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{4h}$$

Solución numérica estándar.

Solución numérica estándar.

Aproximación de las derivadas. Semidiscretización de la ecuación

Tomemos $N + 1$ puntos equiespaciados de tamaño $h = \frac{1}{N}$ en la región espacial (valga la redundancia ☺) $0 \leq x \leq 1$

$$\mathcal{T}_h : \{x_j = j h, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

- $u_j = u_j(t) \approx u(x_j, t)$
- $u_x = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$
- $u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = \epsilon u_{xx} - u u_x$$

$$\frac{du_j}{dt} = \epsilon \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) - \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{4h}$$

$$\frac{du_j}{dt} = \epsilon \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) - u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} \text{ NO}$$

Solución numérica estándar.

Solución numérica vía ODE

Solución usando RK45 Fehlberg

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = F(\mathbf{U})$$

$$\mathbf{U} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

donde

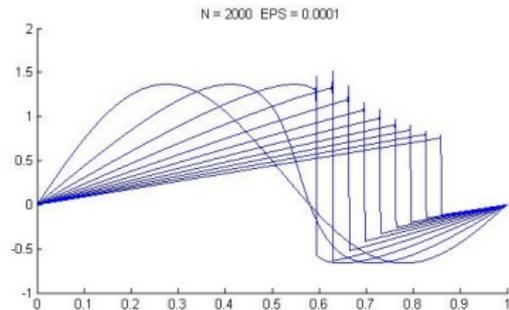
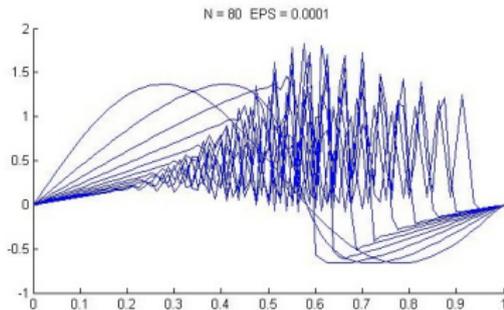
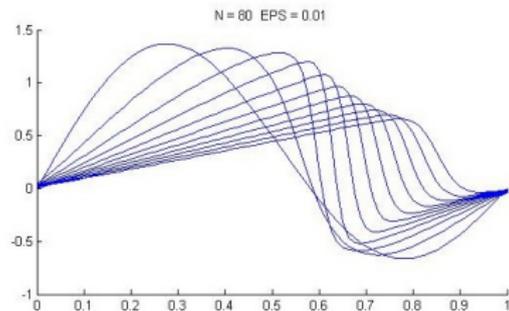
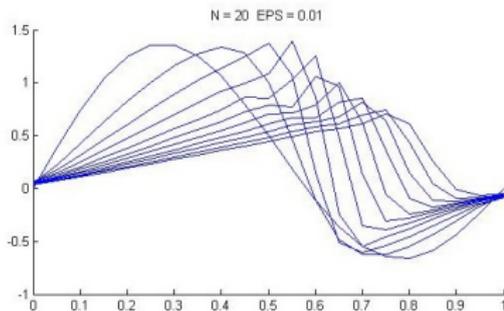
$$F_j(\mathbf{U}) = \begin{cases} \epsilon \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j}{h^2} \right) - \frac{u_{j+1}^2}{4h} & j = 1 \\ \epsilon \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) - \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{4h} & 2 \leq j \leq N-1 \\ \epsilon \left(\frac{u_{j-1} - 2u_j}{h^2} \right) - \frac{u_{j-1}^2}{4h} & j = N \end{cases}$$

con

$$\mathbf{U}_j(0) = \sin(2\pi x_j) + \frac{1}{2} \sin(\pi x_j)$$

Solución numérica estándar.

Solución numérica vía ODE

Resultados para $t = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ 

Solución numérica estándar.

Solución numérica vía ODE

Resultados ... continuación

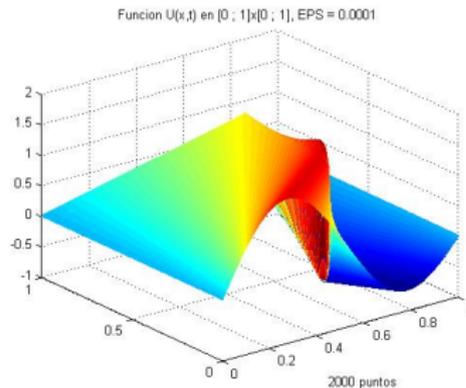
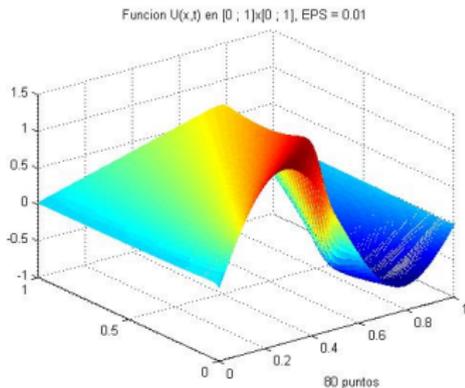


Figure: 240Kb,

168Mb!!

ϵ	x-puntos	tiempo de cómputo	resultado
10^{-2}	20	0.029370 seg	×
10^{-2}	80	0.051588 seg	✓
10^{-4}	80	0.028634 seg	×
10^{-4}	2000	44.447617 seg	✓

Presentación

- 1 Ecuación de Burgers en 1D
 - Intro
 - Solución numérica estándar.
- 2 **Métodos de Malla Adaptativa Movil**
 - **Idea**
 - Aplicación a diferencias finitas
- 3 Consideraciones finales
 - Componentes básicos del método de malla móvil
 - Estrategias de movimiento de malla
 - Discretización de las PDE sobre mallas móviles
 - Solución alternada o simultánea

Idea

Malla Adaptativa Movil

Cuestión Principal

- El ajuste dinámico de los puntos para cada tiempo se conoce como ***malla movil adaptativa***

Idea

Malla Adaptativa Movil

Cuestión Principal

- El ajuste dinámico de los puntos para cada tiempo se conoce como ***malla movil adaptativa***
- Se comprende mejor con un cambio de variables.

$$\hat{u}(\xi, t) = u(x(\xi, t), t)$$

Idea

Malla Adaptativa Movil

Cuestión Principal

- El ajuste dinámico de los puntos para cada tiempo se conoce como ***malla movil adaptativa***
- Se comprende mejor con un cambio de variables.

$$\hat{u}(\xi, t) = u(x(\xi, t), t)$$

- La elección es tal que

$$x = x(\xi, t) \quad x : \Omega_c \subset [0; 1] \rightarrow \Omega = [0; 1]$$

es suave y en principio barata o al menos económica a partir de una malla ξ_j uniforme

Idea

Cambio a las nuevas variables

- Aplicando la regla de la cadena

$$\hat{u}_\xi = u_x X_\xi, \quad \hat{u}_t = u_t + u_x X_t$$

Cambio a las nuevas variables

- Aplicando la regla de la cadena

$$\hat{u}_\xi = u_x X_\xi, \quad \hat{u}_t = u_t + u_x X_t$$

- Sustituyendo en $u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2}\right)_x$

Cambio a las nuevas variables

- Aplicando la regla de la cadena

$$\hat{u}_\xi = u_x X_\xi, \quad \hat{u}_t = u_t + u_x X_t$$

- Sustituyendo en $u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2}\right)_x$
- Obtenemos

$$\hat{u}_t - \frac{\hat{u}_\xi}{X_\xi} X_t = \frac{\epsilon}{X_\xi} \left(\frac{\hat{u}_\xi}{X_\xi}\right)_\xi - \frac{1}{X_\xi} \left(\frac{\hat{u}^2}{2}\right)_\xi$$

Cambio a las nuevas variables

- Aplicando la regla de la cadena

$$\hat{u}_\xi = u_x X_\xi, \quad \hat{u}_t = u_t + u_x X_t$$

- Sustituyendo en $u_t = \epsilon u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2}\right)_x$
- Obtenemos

$$\hat{u}_t - \frac{\hat{u}_\xi}{X_\xi} X_t = \frac{\epsilon}{X_\xi} \left(\frac{\hat{u}_\xi}{X_\xi}\right)_\xi - \frac{1}{X_\xi} \left(\frac{\hat{u}^2}{2}\right)_\xi$$

Cuestión Principal:

¿Cómo determinar la transformación

$$x = x(\xi, t)?$$

Idea

MMPDE

Ecuación Diferencial Parcial de Malla Móvil

- Como se determina la transformación $x = x(\xi, t)$ se sale del marco de esta presentación.

Idea

MMPDE

Ecuación Diferencial Parcial de Malla Móvil

- Como se determina la transformación $x = x(\xi, t)$ se sale del marco de esta presentación.
- Solo se dirá que una manera de hacerlo es resolviendo la *Moving Mesh PDE*

$$x_t = \frac{1}{\rho\tau} (\rho x_\xi)_\xi$$

con condiciones a la frontera

$$x(0, t) = 0 \quad x(1, t) = 1$$

Idea

MMPDE

Ecuación Diferencial Parcial de Malla Móvil

- Como se determina la transformación $x = x(\xi, t)$ se sale del marco de esta presentación.
- Solo se dirá que una manera de hacerlo es resolviendo la *Moving Mesh PDE*

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi$$

con condiciones a la frontera

$$x(0, t) = 0 \quad x(1, t) = 1$$

donde

- $\rho(x, t)$ es la **función de densidad de malla**

Idea

MMPDE

Ecuación Diferencial Parcial de Malla Móvil

- Como se determina la transformación $x = x(\xi, t)$ se sale del marco de esta presentación.
- Solo se dirá que una manera de hacerlo es resolviendo la *Moving Mesh PDE*

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi$$

con condiciones a la frontera

$$x(0, t) = 0 \quad x(1, t) = 1$$

donde

- $\rho(x, t)$ es la **función de densidad de malla**
- τ parámetro: ajusta el tiempo de respuesta a los cambios de $\rho(x, t)$

Idea

Función de densidad de malla $\rho(x, t)$

La elección **apropiada** de ρ es la **clave** para que el *moving mesh method* sea **exitoso**

Función de densidad de malla $\rho(x, t)$

La elección **apropiada** de ρ es la **clave** para que el *moving mesh method* sea **exitoso**

Una elección popular es:

$$\rho(x, t) = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\alpha} |u_{xx}|^2\right)}$$

donde α es un parámetro de intensidad

$$\alpha = \max \left\{ 1 ; \left[\int_0^1 |u_{xx}|^{\frac{2}{3}} dx \right]^3 \right\}$$

Presentación

- 1 Ecuación de Burgers en 1D
 - Intro
 - Solución numérica estándar.
- 2 **Métodos de Malla Adaptativa Movil**
 - Idea
 - **Aplicación a diferencias finitas**
- 3 Consideraciones finales
 - Componentes básicos del método de malla móvil
 - Estrategias de movimiento de malla
 - Discretización de las PDE sobre mallas móviles
 - Solución alternada o simultánea

Aplicación a diferencias finitas

Esquemas en diferencias finitas de la nueva ecuación

Semidiscretización espacial

$$\hat{u}_t - \frac{\hat{u}_\xi}{x_\xi} x_t = \frac{\epsilon}{x_\xi} \left(\frac{\hat{u}_\xi}{x_\xi} \right)_\xi - \frac{1}{x_\xi} \left(\frac{\hat{u}^2}{2} \right)_\xi$$

Esquemas en diferencias finitas de la nueva ecuación

Semidiscretización espacial

$$\hat{u}_t - \frac{\hat{u}_\xi}{x_\xi} x_t = \frac{\epsilon}{x_\xi} \left(\frac{\hat{u}_\xi}{x_\xi} \right)_\xi - \frac{1}{x_\xi} \left(\frac{\hat{u}^2}{2} \right)_\xi$$

Ahora la tenemos dos discretizaciones espaciales

$$\mathcal{T}_h(t) : \{x_j(t) = x(\xi_j, t) \quad j = 0, 1, \dots, N\} \quad \mathcal{T}_{\Delta\xi}^{cte} : \{\xi_j = j \Delta\xi, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

Esquemas en diferencias finitas de la nueva ecuación

Semidiscretización espacial

$$\hat{u}_t - \frac{\hat{u}_\xi}{x_\xi} x_t = \frac{\epsilon}{x_\xi} \left(\frac{\hat{u}_\xi}{x_\xi} \right)_\xi - \frac{1}{x_\xi} \left(\frac{\hat{u}^2}{2} \right)_\xi$$

Ahora la tenemos dos discretizaciones espaciales

$$\mathcal{T}_h(t) : \{x_j(t) = x(\xi_j, t) \quad j = 0, 1, \dots, N\} \quad \mathcal{T}_{\Delta\xi}^{cte} : \{\xi_j = j \Delta\xi, \quad j = 0, 1, \dots, N\}$$

Utilizando diferencias centrales sobre \mathcal{T}_h^{cte} tenemos:

$$\frac{du_j}{dt} - \frac{(u_{j+1} - u_{j-1})}{(x_{j+1} - x_{j-1})} \frac{dx_j}{dt} = \frac{2\epsilon}{(x_{j+1} - x_{j-1})} \left[\frac{(u_{j+1} - u_j)}{(x_{j+1} - x_j)} - \frac{(u_j - u_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \right] - \frac{1}{2} \frac{(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)}{(x_{j+1} - x_{j-1})}$$

$$\{j = 1, \dots, N-1\}$$

$$u_j(t) \approx \hat{u}(\xi_j, t) = u(x_j(t), t)$$

Aplicación a diferencias finitas

Semidiscretización de la MMPDE

Sobre la malla uniforme $\mathcal{T}_{\Delta\xi}^{cte}$

utilizando la identidad

$$\frac{d}{dx} \left(\rho(x) \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{(\rho(x+h) + \rho(x))}{2} \frac{(u(x+h) - u(x))}{h} - \frac{(\rho(x) + \rho(x-h))}{2} \frac{(u(x) - u(x-h))}{h} \right)$$

Discretizamos

$$x_t = \frac{1}{\rho\tau} (\rho x_\xi)_\xi$$

Semidiscretización de la MMPDE

Sobre la malla uniforme $\mathcal{T}_{\Delta\xi}^{cte}$

utilizando la identidad

$$\frac{d}{dx} \left(\rho(x) \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{(\rho(x+h) + \rho(x))}{2} \frac{(u(x+h) - u(x))}{h} - \frac{(\rho(x) + \rho(x-h))}{2} \frac{(u(x) - u(x-h))}{h} \right)$$

Discretizamos

$$x_t = \frac{1}{\rho\tau} (\rho x_\xi)_\xi$$

y tenemos

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{\rho_j\tau\Delta\xi^2} \left[\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2} (x_{j+1} - x_j) - \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{2} (x_j - x_{j-1}) \right]$$

con las condiciones de frontera

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \quad \frac{dx_N}{dt} = 0$$

Aplicación a diferencias finitas

Discretización del resto de los actores

La función de densidad y el parámetro de intensidad

$$\rho(x, t) = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\alpha} |u_{xx}|^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \rho_j = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\alpha_h} |u_{xx,j}|^2}$$

Aplicación a diferencias finitas

Discretización del resto de los actores

La función de densidad y el parámetro de intensidad

$$\rho(x, t) = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\alpha} |u_{xx}|^2\right)} \implies \rho_j = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\alpha_h} |u_{xx,j}|^2}$$

$$\alpha = \max \left\{ 1 ; \left[\int_0^1 |u_{xx}|^{\frac{2}{3}} dx \right]^3 \right\}$$

⇓

$$\alpha_h = \max \left\{ 1 ; \left[\frac{1}{2} \sum_{j=2}^N (x_j - x_{j-1}) \left(|u_{xx,j}|^{\frac{2}{3}} + |u_{xx,j-1}|^{\frac{2}{3}} \right) \right]^3 \right\}$$

Aplicación a diferencias finitas

Discretización del resto de los actores

La función de densidad y el parámetro de intensidad

$$\rho(x, t) = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\alpha} |u_{xx}|^2\right)} \implies \rho_j = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\alpha_h} |u_{xx,j}|^2}$$

$$\alpha = \max \left\{ 1 ; \left[\int_0^1 |u_{xx}|^{\frac{2}{3}} dx \right]^3 \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_h = \max \left\{ 1 ; \left[\frac{1}{2} \sum_{j=2}^N (x_j - x_{j-1}) \left(|u_{xx,j}|^{\frac{2}{3}} + |u_{xx,j-1}|^{\frac{2}{3}} \right) \right]^3 \right\}$$

$$u_{xx,j} = \begin{cases} \frac{2[(x_2-x_1)(u_3-u_1)-(x_3-x_1)(u_2-u_1)]}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_3-x_2)} & j = 1 \\ \frac{2}{(x_{j+1}-x_j)} \left[\frac{(u_{j+1}-u_j)}{(x_{j+1}-x_j)} - \frac{(u_j-u_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})} \right] & 2 \leq j \leq N-1 \\ \frac{2[(x_{N-1}-x_N)(u_{N-2}-u_N)-(x_{N-2}-x_N)(u_{N-1}-u_N)]}{(x_{N-2}-x_N)(x_{N-1}-x_N)(x_{N-2}-x_{N-1})} & j = N \end{cases}$$

Suaviamiento de la función de densidad

Útil si la función u no es suave

Si la función u no es suave la discretización de la función de densidad, puede cambiar abruptamente y hacer innecesariamente lento el proceso de cálculo. Por esto es práctica común suavisar la función de densidad con medias móviles ponderadas.

$$\rho_j \leftarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) & j = 1 \\ \frac{1}{4} \rho_{j-1} + \frac{1}{2} \rho_j + \frac{1}{4} \rho_{j+1} & 2 \leq j \leq N-1 \\ \frac{1}{2} (\rho_{N-1} + \rho_N) & j = N \end{cases}$$

Aplicación a diferencias finitas

Sistema ODE Implícito

Los últimos ingredientes

$$\frac{du_j}{dt} - \frac{(u_{j+1} - u_{j-1})}{(x_{j+1} - x_{j-1})} \frac{dx_j}{dt} = \frac{2\epsilon}{(x_{j+1} - x_{j-1})} \left[\frac{(u_{j+1} - u_j)}{(x_{j+1} - x_j)} - \frac{(u_j - u_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \right] - \frac{1}{2} \frac{(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)}{(x_{j+1} - x_{j-1})}$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{\rho_j \tau \Delta \xi^2} \left[\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2} (x_{j+1} - x_j) - \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{2} (x_j - x_{j-1}) \right]$$

Sea $z = [u_1(t), \dots, u_N(t), x_1(t), \dots, x_N(t)]^t$ y $z' = \frac{dz}{dt}$

Podemos escribir el sistema ODE implícito de $2N$ ecuaciones

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{z}, \mathbf{z}') = \mathbf{0}$$

con $z(0)$ y $z'(0)$ dadas.

Las matrices jacobianas

Solución del sistema ODE Implícito por ode15i de MatLab

- La solución se mostrará utilizando el *solver* **ode15i** de **MatLab**,
- **ode15i** utiliza *backward differentiation formulas BDF* de un paso y orden 5.
- Los métodos implícitos deben resolver sistemas de ecuaciones no lineales en cada paso.
- Es importante tener los jacobianos

$$\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'}$$

Aplicación a diferencias finitas

Patrones de las matrices jacobianas

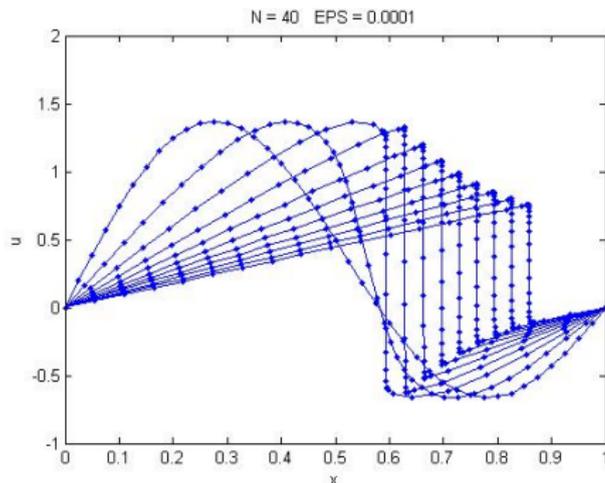
 $\frac{\partial F}{\partial z}$ Para Diferencias Finitas

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & * & & & * & * & & & & & \\ * & * & * & & * & * & * & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & & & * & * & * & & & & \\ & & & & & * & * & & & & \\ \hline * & * & \dots & * & * & * & * & \dots & * & * & \\ * & * & \dots & * & * & * & * & \dots & * & * & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ * & * & \dots & * & * & * & * & \dots & * & * & \\ * & * & \dots & * & * & * & * & \dots & * & * & \end{array} \right]$$

Aplicación a diferencias finitas

Solución numérica MMPDE

Resultados con ode15 de MatLab

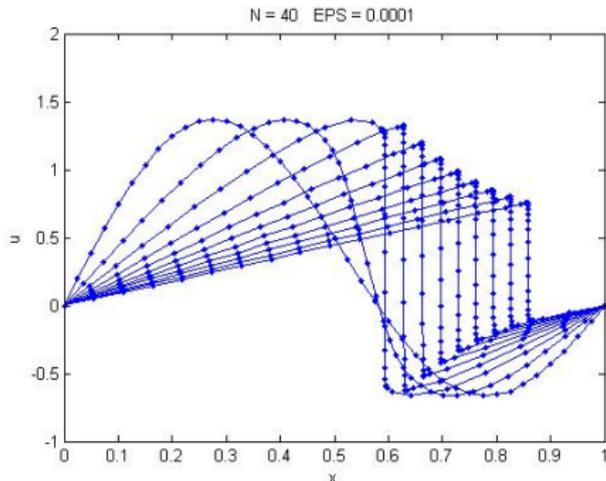


ϵ	x-puntos	τ	tiempo de cómputo	resultado
10^{-4}	40	0.01	4.4710 seg	✓

Aplicación a diferencias finitas

Solución numérica MMPDE

Resultados con ode15 de MatLab



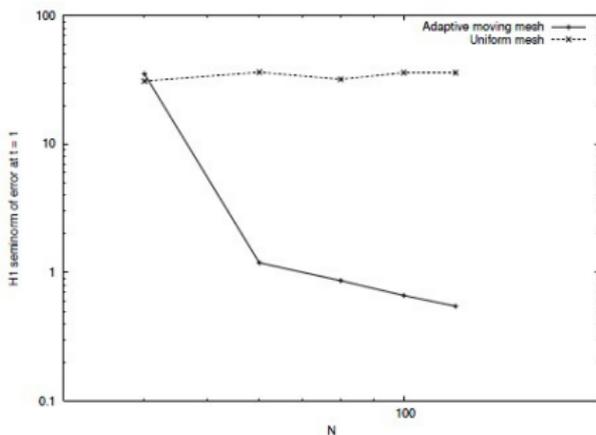
ϵ	x-puntos	τ	tiempo de cómputo	resultado
10^{-4}	40	0.01	4.4710 seg	✓

Otros datos de interés de ode15

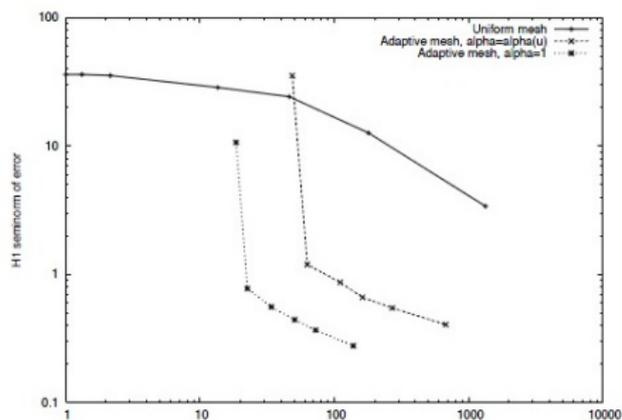
pasos útiles	intentos fallidos	eval función	der parciales	fact LU	Sol. S.L.
564	112	6622	63	344	1267

Aplicación a diferencias finitas

Comparación con solución exacta

Se mide la semi norma H^1 en el tiempo $t = 1$ 

Número de puntos



tiempo de uso de CPU

Presentación

- 1 Ecuación de Burgers en 1D
 - Intro
 - Solución numérica estándar.
- 2 Métodos de Malla Adaptativa Móvil
 - Idea
 - Aplicación a diferencias finitas
- 3 Consideraciones finales
 - **Componentes básicos del método de malla móvil**
 - Estrategias de movimiento de malla
 - Discretización de las PDE sobre mallas móviles
 - Solución alternada o simultánea

Componentes básicos del método de malla móvil

- Estrategia para el movimiento de malla.

Componentes básicos del método de malla móvil

- Estrategia para el movimiento de malla.

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi + \rho + \alpha$$

Componentes básicos del método de malla móvil

- Estrategia para el movimiento de malla.

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi + \rho + \alpha$$

- Método para discretizar la PDE

Componentes básicos del método de malla móvil

- Estrategia para el movimiento de malla.

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi + \rho + \alpha$$

- Método para discretizar la PDE
Diferencias Finitas (Elemento Finito)

Componentes básicos del método de malla móvil

- Estrategia para el movimiento de malla.

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi + \rho + \alpha$$

- Método para discretizar la PDE
Diferencias Finitas (Elemento Finito)
- Mecanismo para resolver el par de sistemas acoplados de ecuaciones

Componentes básicos del método de malla móvil

- Estrategia para el movimiento de malla.

$$x_t = \frac{1}{\rho \tau} (\rho x_\xi)_\xi + \rho + \alpha$$

- Método para discretizar la PDE
Diferencias Finitas (Elemento Finito)
- Mecanismo para resolver el par de sistemas acoplados de ecuaciones
ode15i (implícito) de MatLab

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)

- Las basadas en velocidad.

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)
 - Controlan directamente la ubicación de los puntos.

- Las basadas en velocidad.

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)
 - Controlan directamente la ubicación de los puntos.
 - Estimaciones anteriores del error.

- Las basadas en velocidad.

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)
 - Controlan directamente la ubicación de los puntos.
 - Estimaciones anteriores del error.
 - Consideraciones geométricas.
- Las basadas en velocidad.

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)
 - Controlan directamente la ubicación de los puntos.
 - Estimaciones anteriores del error.
 - Consideraciones geométricas.
- Las basadas en velocidad.
 - Se concentran en la velocidad de cambio de la malla y encuentran la posición integrando el campo de velocidades.

Estrategias de movimiento de malla

Métodos usuales: basados en localización y basados en velocidad

Las estrategias de movimiento de malla típicamente las podemos dividir en dos grupos:

- Las basadas en localización. (métodos variacionales)
 - Controlan directamente la ubicación de los puntos.
 - Estimaciones anteriores del error.
 - Consideraciones geométricas.
- Las basadas en velocidad.
 - Se concentran en la velocidad de cambio de la malla y encuentran la posición integrando el campo de velocidades.
 - Están basados en métodos Lagrangianos de dinámica de fluidos.
Las coordenadas son partículas en un fluido

Componentes básicos del método de malla móvil

Métodos de localización

Principio de Equidistribución:

- Las MMPDE son ecuaciones elípticas o parabólicas.

Métodos de localización

Principio de Equidistribución:

- Las MMPDE son ecuaciones elípticas o parabólicas.
- Es usual que se construyan basados en el **Principio de Equidistribución:**
Dado $N > 1$, $\rho(x) > 0$ continua sobre $[a; b]$ encontrar una partición

$$\mathcal{T}_h : \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$$

tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} \rho(x) dx = \dots = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \rho(x) dx$$

Métodos de localización

Principio de Equidistribución:

- Las MMPDE son ecuaciones elípticas o parabólicas.
 - Involucran una transformación de coordenada de malla.
- Es usual que se construyan basados en el **Principio de Equidistribución:**
 Dado $N > 1$, $\rho(x) > 0$ continua sobre $[a; b]$ encontrar una partición

$$\mathcal{T}_h : \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$$

tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} \rho(x) dx = \dots = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \rho(x) dx$$

Métodos de localización

Principio de Equidistribución:

- Las MMPDE son ecuaciones elípticas o parabólicas.
 - Involucran una transformación de coordenada de malla.
 - Involucran algún proceso de minimización de errores.
- Es usual que se construyan basados en el

Principio de Equidistribución:

Dado $N > 1$, $\rho(x) > 0$ continua sobre $[a; b]$ encontrar una partición

$$\mathcal{T}_h : \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$$

tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} \rho(x) dx = \dots = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \rho(x) dx$$

Componentes básicos del método de malla móvil

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas

- Elemento finito

Componentes básicos del método de malla móvil

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas
 - Parten del dominio computacional

- Elemento finito

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas
 - Parten del dominio computacional
 - Son más frecuentes en regiones regulares (intervalos, rectángulos, cubos, etc.)

- Elemento finito

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas
 - Parten del dominio computacional
 - Son más frecuentes en regiones regulares (intervalos, rectángulos, cubos, etc.)
 - Conduce a transformaciones de coordenadas que pueden complicar el asunto.
- Elemento finito

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas
 - Parten del dominio computacional
 - Son más frecuentes en regiones regulares (intervalos, rectángulos, cubos, etc.)
 - Conduce a transformaciones de coordenadas que pueden complicar el asunto.
- Elemento finito
 - Parten del dominio físico

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas
 - Parten del dominio computacional
 - Son más frecuentes en regiones regulares (intervalos, rectángulos, cubos, etc.)
 - Conduce a transformaciones de coordenadas que pueden complicar el asunto.
- Elemento finito
 - Parten del dominio físico
 - Son más frecuentes en regiones irregulares

Discretización de las PDE

Esquemas

- Diferencias finitas
 - Parten del dominio computacional
 - Son más frecuentes en regiones regulares (intervalos, rectángulos, cubos, etc.)
 - Conduce a transformaciones de coordenadas que pueden complicar el asunto.
- Elemento finito
 - Parten del dominio físico
 - Son más frecuentes en regiones irregulares
 - No tiene las complicaciones de cambios de coordenadas raras.

Componentes básicos del método de malla móvil

Movimientos de malla en el tiempo

Métodos tipo cuasi-Lagrange y rezonificación

- Quasi-Lagrange (que se desarrolló aquí)

- Rezonificación

Componentes básicos del método de malla móvil

Movimientos de malla en el tiempo

Métodos tipo cuasi-Lagrange y rezonificación

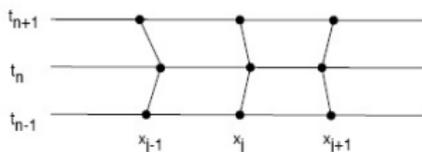
- Quasi-Lagrange (que se desarrolló aquí)
 - Los puntos de la malla son continuos en el tiempo.

- Rezonificación

Movimientos de malla en el tiempo

Métodos tipo cuasi-Lagrange y rezonificación

- Quasi-Lagrange (que se desarrolló aquí)
 - Los puntos de la malla son continuos en el tiempo.
 - La $u_t \mapsto \hat{u}_t$ (a lo largo de las trayectorias de la malla) + un término que refleja el movimiento convectivo de malla.

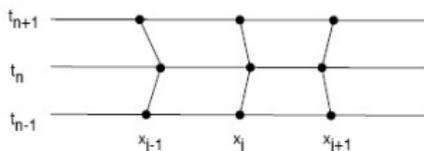


- Rezonificación

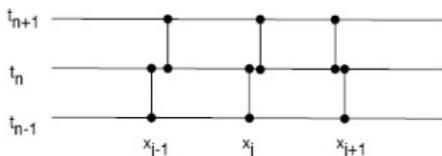
Movimientos de malla en el tiempo

Métodos tipo cuasi-Lagrange y rezonificación

- Quasi-Lagrange (que se desarrolló aquí)
 - Los puntos de la malla son continuos en el tiempo.
 - La $u_t \mapsto \hat{u}_t$ (a lo largo de las trayectorias de la malla) + un término que refleja el movimiento convectivo de malla.



- Rezonificación
 - Los puntos son considerados intermitentes en el tiempo.
 - Cada nivel temporal es actualizado, a partir de $(x_n; u_n)$ se **interpola** para x_{n+1} y se discretiza la PDE en x_{n+1}



Componentes básicos del método de malla móvil

Solución del par de sistemas acoplados

Según el método de movimiento en el tiempo

- Se debe resolver un par de sistemas acoplados

Componentes básicos del método de malla móvil

Solución del par de sistemas acoplados

Según el método de movimiento en el tiempo

- Se debe resolver un par de sistemas acoplados
 - La ecuación física (PDE)
 - La ecuación de malla.

Solución del par de sistemas acoplados

Según el método de movimiento en el tiempo

- Se debe resolver un par de sistemas acoplados
 - La ecuación física (PDE)
 - La ecuación de malla.
- Si el movimiento de la malla temporal se da por **rezonificación**.
 - Se resuelven siempre alternadamente (por su diseño)

Solución del par de sistemas acoplados

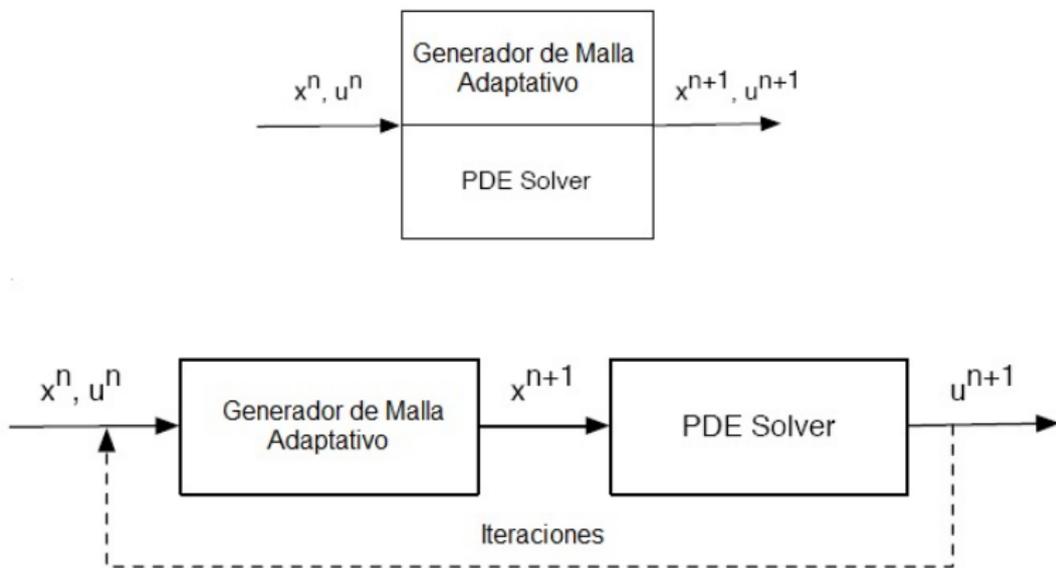
Según el método de movimiento en el tiempo

- Se debe resolver un par de sistemas acoplados
 - La ecuación física (PDE)
 - La ecuación de malla.
- Si el movimiento de la malla temporal se da por **rezonificación**.
 - Se resuelven siempre alternadamente (por su diseño)
- Si el movimiento de la malla temporal es **quasi-Lagrange** se puede resolver:
 - Simultáneamente (un gran sistema)
 - Alternadamente

Componentes básicos del método de malla móvil

Esquemas de soluciones del par de sistemas acoplados

Simultáneo - Alternado



Solución simultánea

Ventajas - Desventajas

Ventajas

- Relativamente más cómodo.
- Se pueden usar directamente solvers ODE (confiables).
- Mejores propiedades globales de convergencia.
- Se tiene en cuenta la relación entre la malla y la solución del PDE.

Solución simultánea

Ventajas - Desventajas

Ventajas

- Relativamente más cómodo.
- Se pueden usar directamente solvers ODE (confiables).
- Mejores propiedades globales de convergencia.
- Se tiene en cuenta la relación entre la malla y la solución del PDE.

Desventajas

- El sistema acoplado puede ser feamente no lineal.
- Generalmente reservados a 1D.
- Se pierden propiedades de los sistemas desacoplados como la sparcidad, simetría, definición positiva.

Solución simultánea

Ventajas - Desventajas

Ventajas

- Relativamente más cómodo.
- Se pueden usar directamente solvers ODE (confiables).
- Mejores propiedades globales de convergencia.
- Se tiene en cuenta la relación entre la malla y la solución del PDE.

Desventajas

- El sistema acoplado puede ser feamente no lineal.
- Generalmente reservados a 1D.
- Se pierden propiedades de los sistemas desacoplados como la sparcidad, simetría, definición positiva.



Solución alternada

Ventajas - Desventajas

Ventajas

- Funcionan bien si el paso temporal es razonablemente pequeño o la función u no tiene fuertes cambios en el tiempo.
- Más flexibilidad: el código de la malla puede ser programado independientemente y luego incorporarse a un PDE solver.
- Más eficiente en cada paso (las matrices tienen mejores propiedades)
- Al no estar vinculada la malla a la PDE, esta no tiene que tener forma de PDE, puede ser un proceso de minimización de errores.

Solución alternada

Ventajas - Desventajas

Ventajas

- Funcionan bien si el paso temporal es razonablemente pequeño o la función u no tiene fuertes cambios en el tiempo.
- Más flexibilidad: el código de la malla puede ser programado independientemente y luego incorporarse a un PDE solver.
- Más eficiente en cada paso (las matrices tienen mejores propiedades)
- Al no estar vinculada la malla a la PDE, esta no tiene que tener forma de PDE, puede ser un proceso de minimización de errores.

Desventajas

- Si el lag de tiempo no es el adecuado puede que se necesiten muchas iteraciones para la solución del sistema PDE físico.

FIN